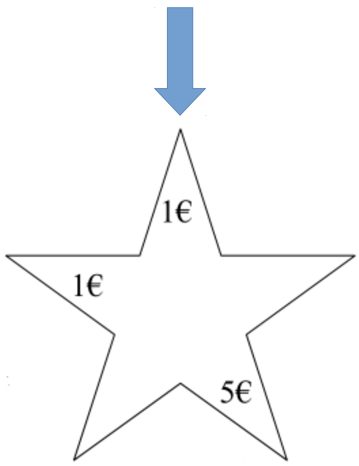
Training 1.AKL Q12



1. In der Abbildung (rechts) ist eine Art Glücksrad abgebildet. Wenn der Pfeil auf ein Feld mit einem Geldbetrag zeigt, wird der Betrag **ausgezahlt**. Berechnen Sie den Einsatz pro Spiel, der nötig ist, damit es sich um ein faires Spiel handelt! (Fair: Erwartungswert für den **Gewinn** = 0)
2. In 70% der Fälle fällt ein beschmiertes Butterbrot auf die belegte Seite. Berechnen Sie die zu erwartende Anzahl (= Erwartungswert) an Butterbroten, die auf die belegte Seite fallen, wenn man 4 Brote fallen lässt! (Tipp: Bernoulli mit Zurücklegen, „0 Brote fallen auf die geschmierte Seite“ nicht vergessen)
3. Bei einem Spiel wird ein Würfel wird zwei Mal hintereinander geworfen. Der Spieler gewinnt 2 €, wenn er zweimal die gleiche Zahl geworfen hat. Der Einsatz beträgt 1 €.
   a) Berechnen Sie den Gewinn-Erwartungswert E(x) und die zugehörige Standardabweichung σ.
   b) Fertigen Sie ein Stabdiagramm an und zeichnen Sie auch E(x) und σ ein.
   c) Berechnen Sie, wie groß der auszuzahlende Betrag im Gewinnfall statt 2 € sein müsste, damit bei dem gegebenen Einsatz das Spiel fair ist! (Fair: Erwartungswert für den Gewinn = 0)
4. In einer Urne befinden sich 2 gelbe und 3 blaue Kugeln. Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 3. gezogene Kugel blau bzw. gelb ist! (Tipp: es gibt nur die Möglichkeiten bbb,gbb, bgb und ggb)
   b) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Zufallsgröße X: „Anzahl der blauen Kugeln“!
   c) Wie ändert sich der Erwartungswert von b) wenn man die Kugeln zurücklegt?
   d) Bei einem Spiel zahlt man einen Einsatz von 2€. Wenn man eine gelbe Kugel zieht erzielt man einen Gewinn von 1€. Wenn man beide gelben Kugeln zieht gibt es 4€ Gewinn. Bestimmen Sie E(x), Var(x) und die Standardabweichung σ
   Handelt es sich um ein faires Spiel?

Training 1.AKL Q12 Lösungsvorschlag

1. In der Abbildung (rechts) ist eine Art Glücksrad abgebildet. Wenn der Pfeil auf ein Feld mit einem Geldbetrag zeigt, wird der Betrag **ausgezahlt**. Berechnen Sie den Einsatz pro Spiel, der nötig ist, damit es sich um ein faires Spiel handelt! (Fair: Erwartungswert für den **Gewinn** = 0)

x (Auszahlung in €)	0	1	5
p(x)	2/5	2/5	1/5

$\mu = E(x) = 1{,}4$ € ist der „mittlere Auszahlungsbetrag“
Wäre der Einsatz 1,40 €, wäre der mittlere Gewinn = 0

2. In 70% der Fälle fällt ein beschmiertes Butterbrot auf die belegte Seite. Berechnen Sie die zu erwartende Anzahl (= Erwartungswert) an Butterbroten, die auf die belegte Seite fallen, wenn man 4 Brote fallen lässt! (Tipp: Bernoulli mit Zurücklegen, „0 Brote fallen auf die geschmierte Seite“ nicht vergessen)

Anzahl der Brote x	0	1	2	3	4
p(x)	$0{,}3^4$ =0,0081	$\binom{4}{1}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7$ =0.0756	$\binom{4}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^2$ =0,2646	$\binom{4}{3}\cdot 0{,}3^1\cdot 0{,}7^3$ =0,4116	$0{,}7^4$ =0,2401

Es fallen „im Mittel“ 2,8 Brote auf die geschmierte Seite

3. Bei einem Spiel wird ein Würfel wird zwei Mal hintereinander geworfen. Der Spieler gewinnt 2 €, wenn er zweimal die gleiche Zahl geworfen hat. Der Einsatz beträgt 1 €.

a) Berechnen Sie den Gewinn-Erwartungswert E(x) und die zugehörige Standardabweichung σ.
Zufallsgröße X: durchschnittlicher Gewinn = (Auszahlung- Einsatz)

Gewinn x	-1 €	2 €
p(x)	5/6	1/6

$\mu = E(x) = -0{,}5$ €, $Var(x) = (-1-(-0{,}5))^2\cdot\frac{5}{6} + (2-(-0{,}5))^2\cdot\frac{1}{6} = 0{,}833$ $\sigma = 0{,}913$

b) Fertigen Sie ein Stabdiagramm an und zeichnen Sie auch E(x) und σ ein.
Naja…..

c) Berechnen Sie, wie groß der auszuzahlende Betrag im Gewinnfall statt 2 € sein müsste, damit bei dem gegebenen Einsatz das Spiel fair ist! (Fair: Erwartungswert für den Gewinn = 0)

$$E(x) = (-1)\cdot\frac{5}{6} + \boldsymbol{b}\cdot\frac{1}{6} = 0 \Rightarrow b = 5$$ Die Auszahlung müsste 6 € betragen

4. In einer Urne befinden sich 2 gelbe und 3 blaue Kugeln. Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 3. gezogene Kugel blau bzw. gelb ist! (Tipp: es gibt nur die Möglichkeiten bbb,gbb, bgb und ggb)

$p(„bbb“)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$ $\quad p(„bgb“)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{10}$

$p(„gbb“)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{10}$ $\quad p(„ggb“)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{10}$

p(„3.Kugel blau“) = 0,6 p(„3.Kugel gelb“) = 1 – 0,6 = 0,4

b) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Zufallsgröße X: „Anzahl der blauen Kugeln“!
Möglichkeiten: 1, 2, 3 blaue Kugeln

$p(„bbb“)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$ p(„3“) = 0,1

1 blaue: ggb, gbg, bgg : $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{10}$ p(„1“) = 0,3

eigentlich unnötig, da p(„2“) = 1 – p(„1“) - p(„3“) aber zur Übung

2 blaue: gbb, bgb, bbg : $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{10}$ p(„2“) = 0,6

Anzahl blau x	1	2	3
p(x)	0,3	0,6	0,1

$\mu=E(x)=1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}6+3\cdot 0{,}1=\mathbf{1{,}8}$

c) Wie ändert sich der Erwartungswert von b) wenn man die Kugeln zurücklegt?

Anzahl blau x	1	2	3
p(x)	$\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2$ =0,288	$\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^1$ =0.432	$\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0$ =0,216

$\mu=E(x)=1\cdot 0{,}288+2\cdot 0{,}432+3\cdot 0{,}216=\mathbf{1{,}8}$

d) Bei einem Spiel zahlt man einen Einsatz von 2€. Wenn man eine gelbe Kugel zieht erzielt man einen Gewinn von 1€. Wenn man beide gelben Kugeln zieht gibt es 4€ Gewinn. Bestimmen Sie E(x), Var(x) und die Standardabweichung σ
Handelt es sich um ein faires Spiel?
Wir betrachten den Gewinn als Zufallsgröße x. Möglich :
x = -2 € → 0 gelbe → -2€ p(0) = p(„3 blaue“) = 0,1
x = -1 € → 1 gelbe → -1€ p(1) = p(„2 blaue“) = 0,6
x = 2 € → 2 gelbe → 2€ p(2) = p(„1 blaue“) = 0,3

Gewinn x	-2 €	-1 €	2 €
p(x)	0,1	0,6	0,3

$\mu=E(x)=-2€\cdot 0{,}1-1€\cdot 0{,}6+2€\cdot 0{,}3=\mathbf{-0{,}2}€$ Das Spiel ist also nicht fair

$Var(x)=(-2-(-0{,}2))^2\cdot 0{,}1+(-1-(-0{,}2))^2\cdot 0{,}6+(2-(-0{,}2))^2\cdot 0{,}3=\mathbf{1{,}512}$ σ = 1,23 €