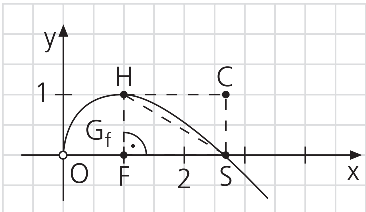
**5.** **a)** Gemeinsamer Punkt von $G_f$ mit der x-Achse:
$x(1 - \ln x) = 0;$
$x_1 = 0 \notin D_f;$
$\ln x_2 = 1;$
$x_2 = e \in D_f;$ $\quad$ S (e | 0)
Hochpunkt von $G_f$:
$f(x) = x - x \ln x;$
$f'(x) = 1 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = 1 - \ln x - 1 = -\ln x;$
$f''(x) = -\frac{1}{x};$
$f'(x) = 0$: $\; -\ln x_3 = 0;\quad x_3 = 1;\quad f(1) = 1;$
$f''(1) = -1 < 0$:
Der Punkt H (1 | 1) ist Hochpunkt von $G_f$ .

**b)** Als besonders einfache $\begin{Bmatrix} \text{untere} \\ \text{obere} \end{Bmatrix}$ Schranke für A kann man den Inhalt des $\begin{Bmatrix} \text{Dreiecks HFS} \\ \text{Rechtecks HFSC} \end{Bmatrix}$

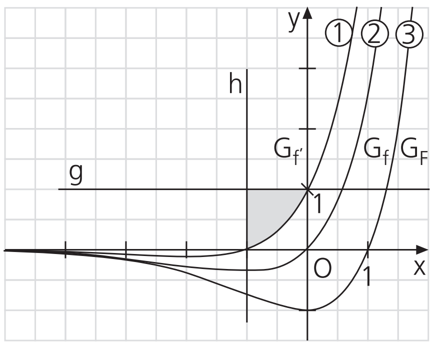
verwenden; wegen $\overline{HF} = 1$ und $\overline{FS} = e - 1 = 1{,}71828\ldots$ ergibt sich $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (e - 1) < A < 1 \cdot (e - 1)$,
d. h. $\frac{e-1}{2} < A < e - 1$, also $0{,}85 < A < 1{,}72$.




*Hinweis*:
Auf 2 Dezimalen ergibt sich als untere Schranke *nicht* 0,86, sondern 0,85.

**c)** $A = \int_1^e f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{4} \cdot (3 - 2 \ln x)\right]_1^e = \frac{e^2}{4} \cdot (3 - 2 \cdot 1) - \frac{1}{4} \cdot (3 - 2 \cdot 0) = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = 1{,}09726\ldots \approx 1{,}10$

**6.** Nur der Graph ② enthält den Ursprung: ② ist also $G_f$.
Wegen $F'(0) = f(0) = 0$ ist ③ der Graph der Stammfunktion F von f.
① ist der Graph der Ableitungsfunktion von f, da $f'(0) > 0$ ist und nur der Graph ① die y-Achse oberhalb des Ursprungs schneidet.




**a)** $f(x) = xe^x;$
$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x)\,e^x;$
$f''(x) = 1 \cdot e^x + e^x + xe^x = (2 + x)\,e^x;$
$F(x) = (x - 1)\,e^x$, da $F'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x - 1 \cdot e^x = xe^x = f(x)$ und
$F(0) = -1$ sowie $F(1) = 0$ ist.
Graph ①: Steigung der Tangente in $S_1$ (–1 | 0) ist
$f''(-1) = (2 - 1)e^{-1} = \frac{1}{e}$; also ist $\tan \varphi_1 = \frac{1}{e}$
und $\varphi_1 \approx 20{,}2°$.
Graph ②: Steigung der Tangente in O (0 | 0) ist
$f'(0) = 1$; also ist $\tan \varphi_2 = 1$ und $\varphi_2 = 45°$.
Graph ③: Steigung der Tangente in $S_3$ (1 | 0) ist $F'(1) = f(1) = e$; also ist $\tan \varphi_3 = e$ und $\varphi_3 \approx 69{,}8°$.

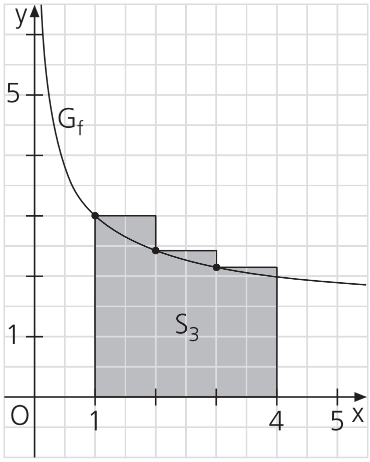
**b)** $A = 1 \cdot 1 - \int_{-1}^{0} f'(x)\,dx = 1 - [f(x)]_{-1}^{0} = 1 - [xe^x]_{-1}^{0} = 1 - [0 \cdot 1 - (-1 \cdot e^{-1})] = 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}63$

**7.** a) $\Delta x = 1$

Obersumme:

$S_3 = 1 \cdot [f(1) + f(2) + f(3)] =$

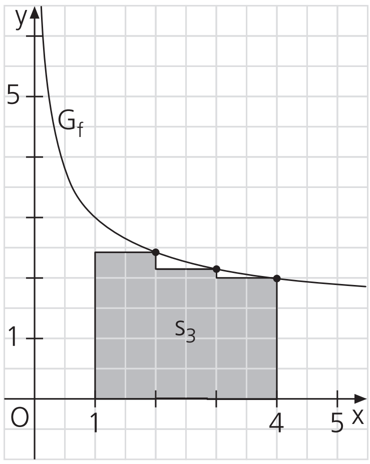
$= 1 \cdot \left[\left(\frac{2}{1} + 1\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)\right] = 7{,}5689\ldots$




Untersumme:

$s_3 = 1 \cdot [f(2) + f(3) + f(4)] =$

$= 1 \cdot \left[\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) + \left(\frac{2}{2} + 1\right)\right] = 6{,}5689\ldots$




Mittelwert:

$A_M = \frac{S_3 + s_3}{2} = 7{,}0689\ldots \approx 7{,}07$

b) Prozentsatz:

$\frac{A_M - A}{A} \approx \frac{7{,}07 - 7}{7} = \frac{0{,}07}{7} = 0{,}01 = 1\%$:

$A_M$ weicht um etwa 1% von A ab.

**8.** a) $\Delta x = 0{,}5$

Obersumme:

$S_4 = 0{,}5 \cdot [f(2) + f(2{,}5) + f(3) + f(3{,}5)] =$

$= 0{,}5 \cdot \left[1 + \frac{16}{25} + \frac{4}{9} + \frac{16}{49}\right] = 1{,}2054\ldots$

Untersumme:

$s_4 = S_4 - 0{,}5 \cdot f(2) + 0{,}5 \cdot f(4) =$

$= S_4 - 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot \frac{1}{4} =$

$= 0{,}8304\ldots$

Mittelwert:

$A^* = \frac{S_4 + s_4}{2} = 1{,}0179\ldots \approx 1{,}018$

b) Exakter Wert:

$A = \int\limits_2^4 \frac{4}{x^2}\,dx = \left[-\frac{4}{x}\right]_2^4 = -1 + 2 = 1$

Abweichung:

$\frac{A^* - A}{A} \approx 0{,}02 = 2\%$:

A* weicht um etwa 2% von A ab.

**9.** a) Da die Parabel $G_f$ und das von $G_f$ und der x-Achse berandete Flächenstück achsensymmetrisch zur Geraden g: x = 2 durch den Parabelscheitel sind, gilt für die Obersumme

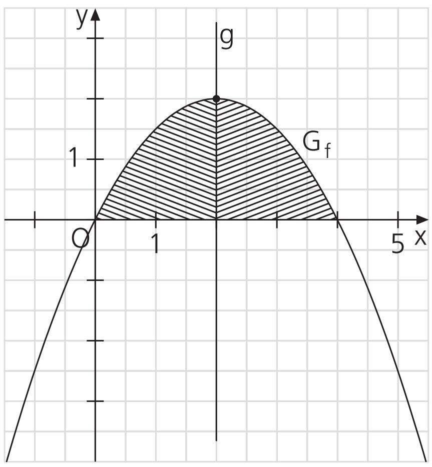
$S_4 = 2 \cdot 1 \cdot [f(1) + f(2)] =$

$= 2 \cdot [(2 - 0{,}5) + (4 - 2)] = 2 \cdot (1{,}5 + 2) = 7$

und für die Untersumme

$s_4 = 2 \cdot 1 \cdot [f(0) + f(1)] = 2 \cdot 1{,}5 = 3$;

also ist der Mittelwert $A^* = \frac{7+3}{2} = 5$.




b) $A = \int\limits_0^4 f(x)\,dx = \int\limits_0^4 (2x - 0{,}5x^2)\,dx =$

$= \left[x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \left(16 - \frac{1}{6} \cdot 64\right) - 0 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$

*oder*

$A = 2 \cdot \int\limits_0^2 f(x)\,dx = 2 \cdot \left[x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = 2 \cdot \left[\left(4 - \frac{8}{6}\right) - 0\right] = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$

Abweichung:

$\frac{5\frac{1}{3} - 5}{5\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{5\frac{1}{3}} = \frac{1}{16} \approx 6\%$:

Der Näherungswert A* weicht um etwa 6% vom exakten Wert A ab.

**10.** a) $f(1) = \frac{1}{3}(1 - 9 + 27 - 19) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$: S (1 | 0)

b) $f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 18x + 27) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$;

$f''(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$

Wendepunkt:

$f''(x) = 0$; $x_w = 3$;

$f''(x) > 0$, wenn $x > 3$, und $f''(x) < 0$, wenn $x < 3$ ist:

Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ an der Stelle $x = 3$; deshalb hat $G_f$ den Wendepunkt W (3 | f(3)).

$f(3) = \frac{1}{3}(27 - 9 \cdot 9 + 27 \cdot 3 - 19) = \frac{8}{3}$; da ferner $f'(3) = 0$ ist, hat $G_f$ den Terrassenpunkt W $(3 \mid \frac{8}{3})$.

Wendetangente $t_w$: $y = \frac{8}{3}$

c) $$A = A_{OFWT} - \int_1^3 f(x)\,dx =$$

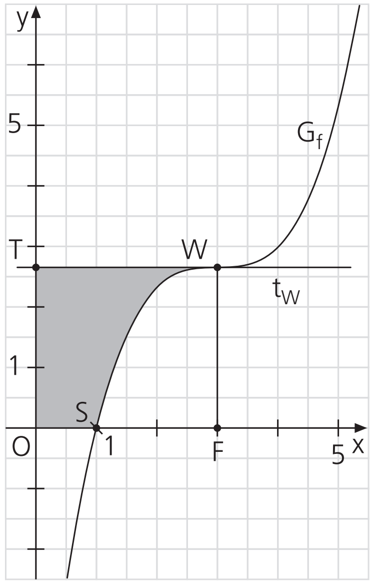
$$= 3 \cdot \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \cdot \int_1^3 (x^3 - 9x^2 + 27x - 19)\,dx =$$

$$= 8 - \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{3}x^3 + \frac{27}{2}x^2 - 19x\right]_1^3 =$$

$$= 8 - \frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{81}{4} - 3 \cdot 27 + \frac{27}{2} \cdot 9 - 19 \cdot 3\right) - \left(\frac{1}{4} - 3 + \frac{27}{2} - 19\right)\right] =$$

$$= 8 - \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{15}{4} - \left(-\frac{33}{4}\right)\right] = 8 - 4 = 4;$$

also halbiert $G_f$ das Rechteck OFWT.



**11.**

| | |
|---|---|
| a) | $\int \frac{6x}{1+x^2}\,dx = 3\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = 3\ln(1+x^2) + C$<br>*Hinweis*: $(1+x^2)' = 2x;\ 1+x^2 > 0$ |
| b) | $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0{,}5\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = 0{,}5\ln(1+x^2) + C$<br>*Hinweis*: $(1+x^2)' = 2x;\ 1+x^2 > 0$ |
| c) | $\int \frac{4x}{1+2x^2}\,dx = \ln(1+2x^2) + C$<br>*Hinweis*: $(1+2x^2)' = 4x\ 1+2x^2 > 0$ |
| d) | $\int \frac{2x}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + C$<br>*Hinweis*: $(1+4x^2)' = 8x;\ 1+4x^2 > 0$ |
| e) | $\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \ln(1+x^4) + C$<br>*Hinweis*: $(1+x^4)' = 4x^3;\ 1+x^4 > 0$ |
| f) | $x \notin \{-1;\ 0\}$: $\int \frac{2x+3x^2}{x^2+x^3}\,dx = \ln\lvert x^2+x^3\rvert + C$<br>*Hinweis*: $(x^2+x^3)' = 2x+3x^2$ |
| g) | $x \notin \{-1;\ 0\}$: $\int \frac{2+3x}{x+x^2}\,dx = \int \frac{2x+3x^2}{x^2+x^3}\,dx = \ln\lvert x^2+x^3\rvert + C$<br>*Hinweis*: Erweitern des Integranden mit x; dann vgl. Teilaufgabe f) |
| h) | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$: $-\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$<br>*Hinweis*: $(\cos x)' = -\sin x$ |
| i) | $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x) + C$<br>*Hinweis*: $(1+e^x)' = e^x;\ 1+e^x > 0$ |
| j) | $\int \frac{e^x}{1+6e^x}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6e^x}{1+6e^x}\,dx = \frac{1}{6}\ln(1+6e^x) + C$<br>*Hinweis*: $(1+6e^x)' = 6e^x;\ 1+6e^x > 0$ |
| k) | $x \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$: $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln\lvert\ln x\rvert + C$<br>*Hinweis*: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ |

**12.**

| | |
|---|---|
| a) | $\int \cos(2x)\, e^{\sin(2x)}\, dx = \frac{1}{2}\int 2\cos(2x)\, e^{\sin(2x)}\, dx = \frac{1}{2} \cdot e^{\sin(2x)} + C$<br>*Hinweis*: $[\sin(2x)]' = 2\cos(2x)$ |
| b) | $\int 5x\, e^{x^2}\, dx = \frac{5}{2}\int 2x\, e^{x^2}\, dx = \frac{5}{2}\, e^{x^2} + C$<br>*Hinweis*: $(x^2)' = 2x$ |
| c) | $\int 3x^2\, e^{x^3}\, dx = e^{x^3} + C$<br>*Hinweis*: $(x^3)' = 3x^2$ |
| d) | $\int x^2\, e^{x^3}\, dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\, e^{x^3}\, dx = \frac{1}{3}\, e^{x^3} + C$<br>*Hinweis*: $(x^3)' = 3x^2$ |
| e) | $\int 3x\sqrt{x^2+2}\, dx = \sqrt{(x^2+3)^3} + C$<br>*Hinweis*: $\left[\sqrt{(x^2+3)^3} + C\right]' = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x^2+3} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2+3};\ x^2+3 > 0$ |
| f) | $\int x \sin(\pi - x^2)\, dx = \frac{1}{2}\cos(\pi - x^2) + C$<br>*Hinweis*: $\left[\frac{1}{2}\cos(\pi - x^2) + C\right]' = \frac{1}{2} \cdot [-\sin(\pi - x^2)] \cdot (-2x) = x \sin(\pi - x^2)$ |
| g) | $\int (5x+3)^2\, dx = \frac{1}{15}\int 3 \cdot (5x+3)^2 \cdot 5\, dx = \frac{1}{15}(5x+3)^3 + C$<br>*Hinweis*: $\left[\frac{1}{15}(5x+3)^3 + C\right]' = \frac{1}{15} \cdot 3 \cdot (5x+3)^2 \cdot 5 = (5x+3)^2$ |
| h) | $\int x^2\, e^{(\sin x)^2 + (\cos x)^2}\, dx = \int x^2 \cdot e^1\, dx = e\int x^2\, dx = e \cdot \frac{1}{3}x^3 + C = \frac{e}{3}x^3 + C$<br>*Hinweis*: $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ |
| i) | $\int e^{\sin x}\cos x\, dx = e^{\sin x} + C$<br>*Hinweis*: $(\sin x)' = \cos x$ |
| j) | $\int \frac{2\sin x \cos x}{(\sin x)^2 + 1}\, dx = \ln[(\sin x)^2 + 1] + C$<br>*Hinweis*: $[(\sin x)^2 + 1]' = 2\sin x \cos x;\ (\sin x)^2 + 1 > 0$ |
| k) | $x \in \mathbb{R}^+: \int \frac{2\ln x}{x}\, dx = (\ln x)^2 + C$<br>*Hinweis*: $[(\ln x)^2 + C]' = 2 \cdot (\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$ |

**13.**

| | |
|---|---|
| a) | $\int f(x)\,dx = x^2 + C$<br>$f(x) = 2x$ |
| b) | $\int f(x)\,dx = e^{2x} + C$<br>$f(x) = 2e^{2x}$ |
| c) | $\int f(t)\,dt = 4{,}5t + C$<br>$f(t) = 4{,}5$ |
| d) | $\int f(x)\,dx = \cos(2x) + C$<br>$f(x) = -\sin(2x) \cdot 2 = -2\sin(2x)$ |
| e) | $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$<br>$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \cdot 2 = \cos(2x)$ |
| f) | $\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}e^{3x-1} + C$<br>$f(x) = \frac{1}{3}e^{3x-1} \cdot 3 = e^{3x-1}$ |
| g) | $\int f(x)\,dx = \sqrt{x^2+4} + C$<br>$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ |
| h) | $\int f(t)\,dt = \frac{3}{2}t^2 + C$<br>$f(t) = \frac{3}{2} \cdot 2t = 3t$ |
| i) | $x \in \mathbb{R}^+$: $\int f(x)\,dx = x\ln x + C$<br>$f(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x$ |
| j) | $x \neq 0$: $\int f(x)\,dx = \frac{4}{x} + C$<br>$f(x) = -\frac{4}{x^2}$ |
| k) | $t \neq 0$: $\int f(t)\,dt = \ln(t^2) + C$<br>$f(t) = \frac{1}{t^2} \cdot 2t = \frac{2}{t}$ |
| l) | $\int f(x)\,dx = \cos(2x) + \sin(0{,}5x) + C$<br>$f(x) = -2\sin(2x) + 0{,}5\cos(0{,}5x)$ |
| m) | $\int f(x)\,dx = x^2\sin(2x-1) + C$<br>$f(x) = 2x \cdot \sin(2x-1) + x^2 \cdot \cos(2x-1) \cdot 2 = 2x\sin(2x-1) + 2x^2\cos(2x-1)$ |

**14.** a) Achsenpunkte von $G_f$:

$x - \frac{x^3}{12} = 0;\ |\cdot 12$

$x(12 - x^2) = 0;$

$x_1 = 0;\quad x^2 = 12;\qquad x_2 = 2\sqrt{3};\qquad x_3 = -2\sqrt{3};$

$S_1\ (0\ |\ 0) = O;\qquad S_2\ (2\sqrt{3}\ |\ 0);\qquad S_3\ (-2\sqrt{3}\ |\ 0)$

Ableitungen von f(x):

$f'(x) = 1 - \frac{3x^2}{12} = 1 - \frac{x^2}{4};$

$f''(x) = -\frac{2x}{4} = -\frac{x}{2};$

$f'''(x) = -\frac{1}{2}$

Extrempunkte von $G_f$:

$f'(x) = 0:\ \ 1 - \frac{x^2}{4} = 0;\ \ x^2 = 4;\ \ x_4 = 2;\ \ x_5 = -2;$

$f(2) = \frac{4}{3};\ \ f''(2) = -1 < 0:$

$G_f$ besitzt den Hochpunkt $H\ (2\ |\ \frac{4}{3})$.

$f(-2) = -\frac{4}{3};\qquad f''(-2) = 1 > 0:$

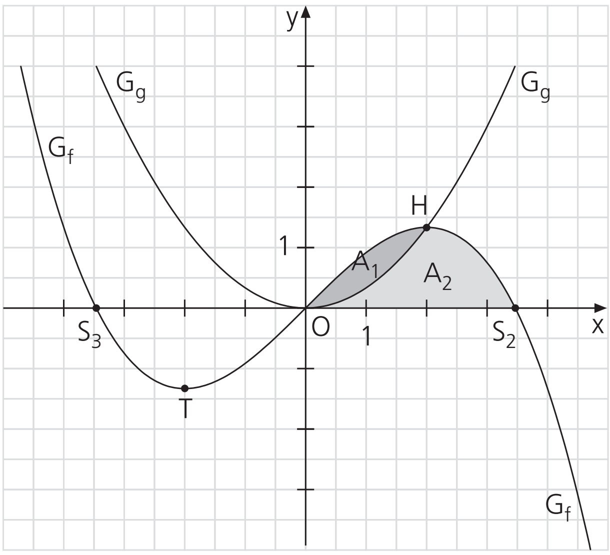
$G_f$ besitzt den Tiefpunkt $T\ (-2\ |\ -\frac{4}{3})$.

Wendepunkt von $G_f$:

$f''(x) = 0:\ \ -\frac{x}{2} = 0;\ \ x_1 = 0;\ \ f(0) = 0;\ \ f'''(0) = -\frac{1}{2} \neq 0:$

Der Ursprung $O\ (0\ |\ 0) = S_1$ ist Wendepunkt von $G_f$.

b)




c) Gemeinsame Punkte von $G_f$ und $G_g$:

$x - \frac{x^3}{12} = \frac{x^2}{3};\ |\cdot 12$

$12x - x^3 = 4x^2;\ |-4x^2$

$-x^3 - 4x^2 + 12x = 0;\ |\cdot(-1)$

$x(x^2 + 4x - 12) = 0;$

$x(x + 6)(x - 2) = 0;$

$x_1 = 0;\ \ x_6 = -6;\ \ x_4 = 2;$

$O\ (0\ |\ 0);\ P\ (-6\ |\ 12);\ H\ (2\ |\ \frac{4}{3})$

Flächeninhalte:

$$A_1 + A_2 = \int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\,dx = \int_0^{2\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^3}{12}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{4 \cdot 12}\right]_0^{2\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2} \cdot 12 - \frac{144}{4 \cdot 12}\right) - 0 = 6 - 3 = 3;$$

$$A_1 = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{3}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{48} - \frac{x^3}{9}\right]_0^2 = \left(\frac{4}{2} - \frac{16}{48} - \frac{8}{9}\right) - 0 = \frac{7}{9};$$

$$A_2 = 3 - \frac{7}{9} = \frac{20}{9};$$

$$A_1 : A_2 = \frac{7}{9} : \frac{20}{9} = 7 : 20:$$

$G_g$ teilt das Flächenstück im Verhältnis 7 : 20.

**15.** $f(x) = ax^2 + bx + c;$

$$F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (at^2 + bt + c)\,dt = \left[\frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2 + ct + d\right]_0^x =$$
$$= \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d\right) - d = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx$$

Die Tangente an $G_{F_0}$ im Punkt $P\,(1 \mid y_P) \in G_{F_0}$ ist waagrecht:
$F_0'(1) = f(1) = 0;$

(1) $a + b + c = 0$

$W\,(0{,}5 \mid y_W)$ ist Wendepunkt von $G_{F_0}$:
$F_0''(x) = f'(x) = 2ax + b;$
$F_0''(0{,}5) = 0;$

(2) $a + b = 0$

Die Wendetangente $t_W$ ist parallel zu g:
$m_g = -\frac{1}{4} = m_{t_W} = F_0'\,(0{,}5) = f(0{,}5);$

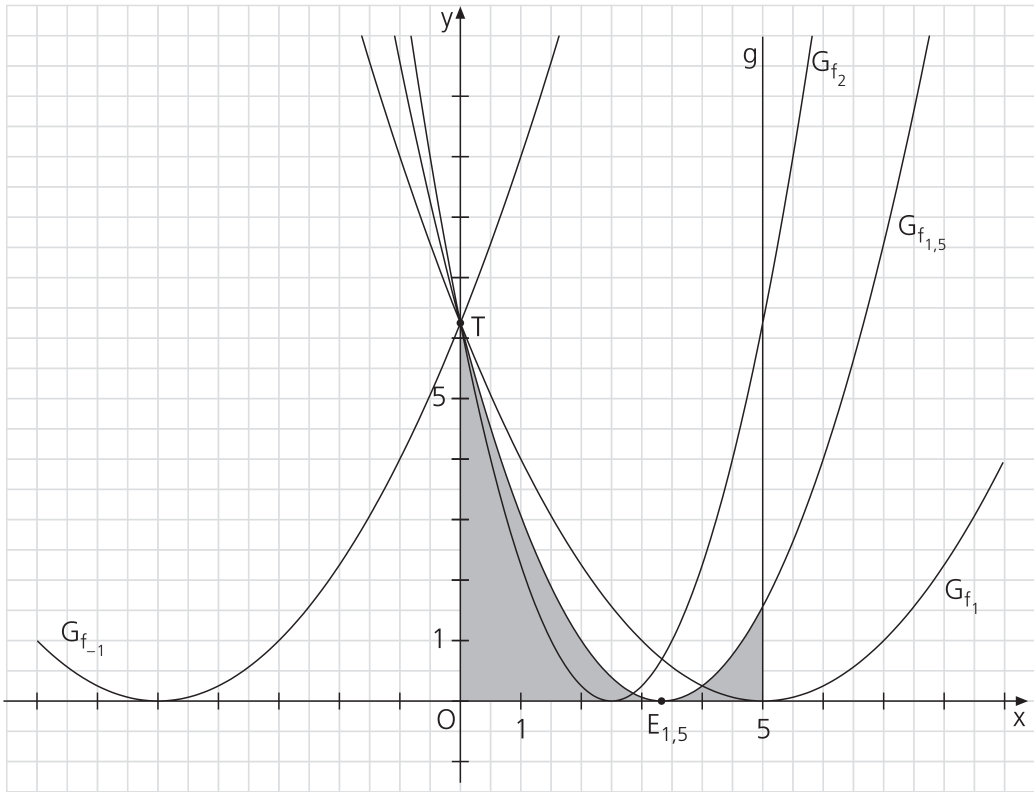
(3) $0{,}25a + 0{,}5b + c = -\frac{1}{4}; \quad | \cdot 4$

Gleichungssystem:
(1) $a + b + c = 0;$
(2) $a + b = 0;$
(3′) $a + 2b + 4c = -1$

(1) – (2) $c = 0$; eingesetzt in (1) und in (3′):
(1′) $a + b = 0$
(3″) $a + 2b = -1$
(3″) – (1′) $\quad b = -1; \quad$ eingesetzt in (1′): $a = 1$

Funktionsterme:
$f(x) = x^2 - x;\ F_0(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

**16.** a)




b) Gemeinsamer Punkt aller Scharkurven:
Da $f_a(0) = 0{,}25\,(0 - 5)^2 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ für jeden Wert von a gilt, verlaufen aller Scharkurven durch den Punkt $T\,(0 \mid 6\frac{1}{4})$.
Parabelscheitel:
Jede Parabel $G_{f_a}$ berührt die x-Achse im Parabelscheitel $E_a$: $ax = 5$; $x = \frac{5}{a}$; $E_a\,(\frac{5}{a} \mid 0)$
Gesamter Flächeninhalt:

$$A(a) = \int_0^5 f_a(x)\,dx = \int_0^5 0{,}25\,(ax - 5)^2\,dx = \left[\frac{0{,}25}{3a}\,(ax - 5)^3\right]_0^5 =$$

$$= \frac{1}{12a}\,[(5a - 5)^3 - (-5)^3] = \frac{125}{12a}\,[(a - 1)^3 + 1] =$$

$$= \frac{125}{12a}\,(a^3 - 3a^2 + 3a) = \frac{125}{12}\,(a^2 - 3a + 3);$$

$$A'(a) = \frac{125}{12}\,(2a - 3);$$

$$A''(a) = \frac{125}{12} \cdot 2 = \frac{125}{6};$$

$A'(a) = 0$: $2a - 3 = 0$; $2a = 3$;
$a = \frac{3}{2}$; $A''(\frac{3}{2}) = \frac{125}{6} > 0$:

Für $a = \frac{3}{2}$ (vgl. die Abbildung) wird der Flächeninhalt minimal;

$$A_{min} = \frac{125}{12}\,(2{,}25 - 4{,}5 + 3) = \frac{125}{16} = 7\frac{13}{16} \approx 7{,}8.$$

**17.** Wegen $f_a(0) = 0$ für jeden Wert von $a \in \mathbb{R}$ verlaufen alle Scharkurven $G_{f_a}$ durch O (0 | 0).

**a)** Ableitungen:

$f'_a(x) = e^{a-x} + xe^{a-x} \cdot (-1) = e^{a-x}(1-x)$;

$f''_a(x) = e^{a-x} \cdot (-1) \cdot (1-x) + e^{a-x} \cdot (-1) =$

$= e^{a-x}(-1 + x - 1) = (x-2)\,e^{a-x}$

Extrempunkt: $f'_a(x) = 0$;

$1 - x = 0$, da stets $e^{a-x} \neq 0$ ist;

$x_1 = 1$; $f_a(1) = 1 \cdot e^{a-1} = e^{a-1}$;

$f''_a(1) = -e^{a-1} < 0$ für jeden Wert von $a \in \mathbb{R}$:

Der Punkt $E_a$ (1 | $e^{a-1}$) ist Hochpunkt von $G_{f_a}$; die Hochpunkte der Scharkurven haben somit alle die gleiche Abszisse, liegen also alle auf derselben Parallelen $g_E$: x = 1 zur y-Achse.

Wendepunkt: $f''_a(x) = 0$;

$x - 2 = 0$, da stets $e^{a-x} \neq 0$ ist;

$x_2 = 2$; $f_a(2) = 2e^{a-2}$;

Vorzeichenwechsel von $f''_a(x)$ an der Stelle x = 2:

Der Punkt $W_a$ (2 | $2e^{a-2}$) ist Wendepunkt von $G_{f_a}$; die Wendepunkte der Scharkurven haben somit alle die gleiche Abszisse, liegen also alle auf derselben Parallelen $g_W$: x = 2 zur y-Achse.

**b)** Wendetangente:

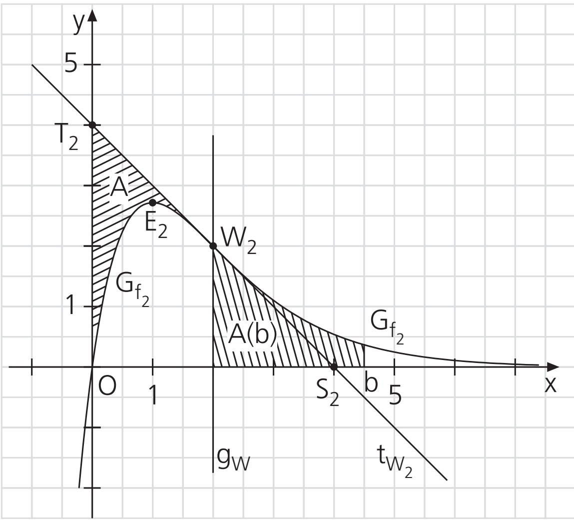
$f'_a(2) = e^{a-2} \cdot (1-2) = -e^{a-2}$;

$t_{W_a}$: $\dfrac{y - 2e^{a-2}}{x-2} = -e^{a-2}$;

$y - 2e^{a-2} = -xe^{a-2} + 2e^{a-2}$;

$t_{W_a}$: $y = -xe^{a-2} + 4e^{a-2}$

**c)**




**d)** Schnittpunkt mit der x-Achse:

$-xe^{a-2} + 4e^{a-2} = 0$; | : $e^{a-2}$ ($e^{a-2} \neq 0$)

$-x + 4 = 0$; $x = 4$; $S_a$ (4 | 0)

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$x = 0$; $y = 4e^{a-2}$; $T_a$ (0 | $4e^{a-2}$)

Mittelpunkt $M_a$ der Strecke $[S_aT_a]$:

$x_{M_a} = \dfrac{4+0}{2} = 2 = x_{W_a}$;

$y_{M_a} = \dfrac{0 + 4e^{a-2}}{2} = 2e^{a-2} = y_{W_a}$; somit ist $M_a = W_a$.

e) (1) $F'(x) = -e^{2-x} \cdot (-1) \cdot (1 + x) - e^{2-x} \cdot 1 = e^{2-x} \cdot (1 + x - 1) = xe^{2-x} = f_2(x)$;
$D_{F'} = \mathbb{R} = D_{f_2}$: F ist eine Stammfunktion von $f_2$.
Wendetangente $t_{W_2}$: $y = -x + 4$
Flächeninhalt:
$$A = \int_0^2 [(-x + 4) - f_2(x)]\, dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 4x - F(x)\right]_0^2 =$$
$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 4x + e^{2-x}(1 + x)\right]_0^2 = \left[-\frac{4}{2} + 4 \cdot 2 + e^0(1 + 2)\right] - [0 + e^2 \cdot 1] =$$
$$= (-2 + 8 + 3) - e^2 = 9 - e^2 \approx 1{,}6$$
(2) $A(b) = \int_2^b f_2(x)\, dx = [F(x)]_2^b = [-e^{2-x}(1 + x)]_2^b = -e^{2-b}(1 + b) - (-e^0 \cdot 3) = 3 - e^{2-b}(1 + b)$;
$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty} \left[3 - \frac{e^2(1 + b)}{e^b}\right] = 3 - 0 = 3 \text{ (vgl. Merkhilfe):}$$
Das von der Geraden $g_W$: $x = 2$, dem Graphen $G_{f_2}$ und der x-Achse berandete, sich nach rechts „ins Unendliche" erstreckende Flächenstück besitzt den (endlichen) Flächeninhalt 3 FE.

**18.** a) $F'(x) = -e^{1-x} - (1 + x)\, e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x}(-1 + 1 + x) = xe^{1-x} = f(x)$
und $D_{F'} = \mathbb{R} = D_f$; also ist F eine Stammfunktion von f.

b) $F_{-1}(x) = \int_{-1}^x f(t)\, dt = [F(t)]_{-1}^x = [-(1 + t)e^{1-t}]_{-1}^x =$
$$= [-(1 + x)e^{1-x}] - [-(1 - 1)e^{1+1}] =$$
$$= -(1 + x)e^{1-x} - 0 = -(1 + x)\, e^{1-x} = F(x)$$

c) $G_f$ verläuft durch O, $G_F$ nicht (vgl. die Abbildung):