CHRISTIAN VON BOMHARD SCHULE

Q12 2M3

1. Schulaufgabe aus der Mathematik

am 18.01.2018

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Lösungsvorschlag

_____ / 41 BE

I. Stochastik

Aufgabe 1 (4 BE)

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X. Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b, wenn $E(X)=23{,}5$ ist.

x_i	-10	0	10	50	100
$P(X=x_i)$	0,2	a	b	0,2	0,15

(I) $0{,}2+a+b+0{,}2+0{,}15=1$
(II) $-10\cdot 0{,}2+0\cdot a+10\cdot b+0{,}2\cdot 50+0{,}15\cdot 100=23{,}5$

(I) $0{,}55+a+b=1$
(II) $10b+23=23{,}5$ | -23

(II) $10b=0{,}5$ $:10$ |
$b=0{,}05$

b in (I) $0{,}55+a+0{,}05=1$ | $-0{,}6$
$a=0{,}4$

Aufgabe 2 (4 BE)

Für eine neue Fernsehserie werden Statisten gesucht. Kurz vor Beendigung des Castings warten 20 Bewerber für noch 11 zu vergebende Rollen. Unter den 20 Bewerbern befinden sich 8 Frauen.
Geben Sie einen Term an, mit dem sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den 11 ausgewählten Mitspielern mindestens 7 Frauen befinden, berechnen lässt.

$$P(\text{mindestens 7 Frauen})=P(\text{7 Frauen})+P(\text{8 Frauen})=\frac{\binom{8}{7}\binom{12}{4}}{\binom{20}{11}}+\frac{\binom{8}{8}\binom{12}{3}}{\binom{20}{11}}$$

Aufgabe 3 (3 BE)

Unter Jugendlichen ist das Interesse, bei einer Fernsehserie mitzuspielen, besonders hoch. Sie bewerben sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % um eine Statistenrolle. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich von 25 Jugendlichen mindestens vier, aber weniger als acht für eine Rolle bewerben.

$$P(4\le X<8)=P(X\le 7)-P(X\le 3)=0{,}51185-0{,}03324=0{,}47861$$

Aufgabe 4 (4 BE)

Es wird weiterhin davon ausgegangen, dass sich 30 % aller Jugendlichen für eine Statistenrolle bewerben. Berechnen Sie, wie viele Jugendliche in einer Gruppe mindestens sein müssen, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einer von ihnen für eine Rolle bewirbt.

$$P(X \geq 1) > 0{,}99$$

$$1 - P(X = 0) > 0{,}99$$

$$P(X = 0) < 0{,}01$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^n < 0{,}01$$

$$0{,}7^n < 0{,}01$$

$$n > \log_{0{,}7} 0{,}01 \approx 12{,}91$$

Es müssen also mindestens 13 Jugendliche sein.

II. Analytische Geometrie

Aufgabe 5 (2 BE)

Beschreiben Sie, wie man überprüfen kann, ob drei Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen.

Man stellt die Geradengleichung zu zwei Punkten auf und überprüft mit Hilfe einer Punktprobe, ob der dritte Punkt auf der Geraden liegt.

Aufgabe 6 (5 + 3 + 3 BE)

Die Punkte A(1,-3,2), B=(2,2,-1) und C=(1,-1,1)bestimment die Ebene E.

a) Zeigen Sie, dass x1 + x2 + 2x3 – 2 = 0 eine Gleichung der Ebene in Koordinatenform ist.

$$E: \quad \vec{X}=\vec{A}+\lambda(\vec{B}-\vec{A})+\mu(\vec{C}-\vec{A})$$

$$\vec{u}=\vec{B}-\vec{A}=\begin{pmatrix}2-1\\2+3\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix} \qquad \vec{v}=\vec{C}-\vec{A}=\begin{pmatrix}1-1\\-1+3\\1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\vec{n}}=\vec{u}\otimes\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}$$

Normalenform : $E: \quad \vec{n}\circ(\vec{X}-\vec{A})=0$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2+3\\x_3-2\end{pmatrix}=x_1-1+x_2+3+2(x_3-2)=\boldsymbol{x_1+x_2+2x_3-2=0}$$

b) Geben Sie die Spurkunkte und die Spurgeraden der Ebene E an,

Spurpunkt x_1-Achse : S_1 (2/0/0) Spurpunkt x_2-Achse : S_2 (0/2/0) Spurpunkt x_3-Achse : S_3 (0/0/1)

Spurgerade g_{12} $\vec{X}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ Spurgerade g_{13} $\vec{X}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

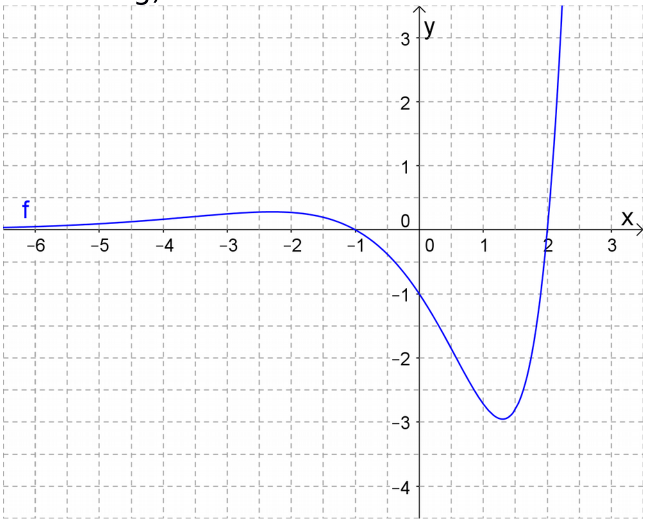
Spurgerade g_{23} $\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

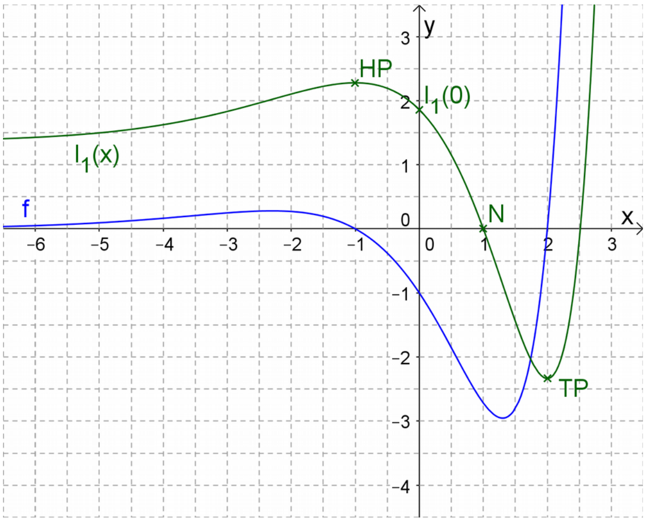
c) Zeichnen Sie die Spurpunkte und die Spurgeraden und die Ebene

III. Analysis

Aufgabe 5 (2 + 5 BE)

Gegeben ist der Graph G_f einer in R definierten Funktion f (siehe untenstehende Abbildung).



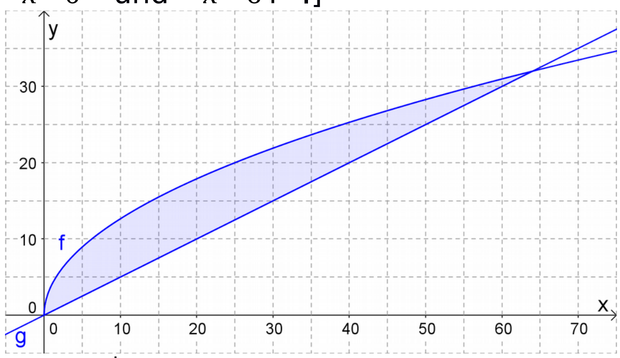


a) Geben Sie einen Näherungswert der Integralfunktion $I_1(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ an der Stelle $x=2$ an und begründen Sie Ihre Lösung.
$I_1(2)\approx -2{,}5$
2,5 ist der Flächeninhalt der Fläche, die vom Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall [1; 2] eingeschlossen wird; negatives Vorzeichen, da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt.

b) Skizzieren Sie in das abgebildete Koordinatensystem den Graphen der Integralfunktion $I_1(x)$. Berücksichtigen Sie dabei mit jeweils angemessener Genauigkeit insbesondere die weiter links gelegene Nullstelle und die Extremstellen von I_1 sowie $I_1(0)$.
Nullstelle bei $x=1$
Extremstellen: HP bei $x=-1$ (mit $y=2{,}5$) TP bei $x=2$ (mit $y=-2{,}5$)
$I_1(0)=2$

Aufgabe 6 (6 BE)

Eine Firma stellt Rotorblätter für Windkraftanlagen her. Die Querschnittsfläche eines Rotorblatts kann näherungsweise durch die von den Graphen der Funktionen f und g mit $f(x)=4\sqrt{x}$ und $g(x)=0{,}5x$ eingeschlossenen Fläche beschrieben werden (s. Abbildung).
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Querschnittsfläche.
[Teilergebnis: Schnittstellen von f und g bei $x=0$ und $x=64$.]



Schnittstelle: $f(x)=g(x)$

$$4\sqrt{x}=0{,}5x \quad | \cdot 2$$
$$8\sqrt{x}=x \quad | \uparrow^2$$
$$64x=x^2 \Rightarrow x_1=64\; x_2=0$$

$$A=\left|\int_0^{64}(f(x)-g(x))\,dx\right|=\left|\int_0^{64}(4\sqrt{x}-0{,}5x)\,dx\right|=\left|\left[4\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}-0{,}25x^2\right]_0^{64}\right|$$

$$A=\left|\frac{8}{3}\cdot 64^{\frac{3}{2}}-0{,}25\cdot 64^2-0\right|=|1365{,}4|=1365{,}4\,(FE)$$