CHRISTIAN VON BOMHARD **SCHULE**

Kurs Q12 12/1
Schulaufgabe im Fach Mathematik
am 10.01.2019
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Name:

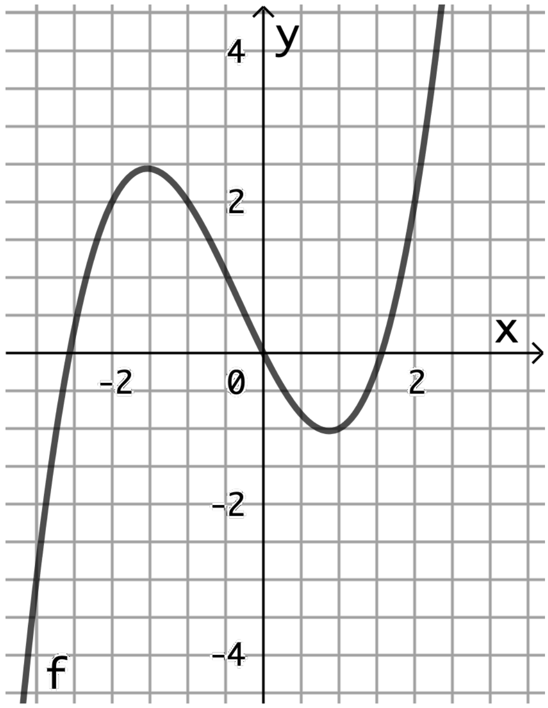
______ / 50 BE

Den Zeitzuschlag aufgrund einer anerkannten ☐ Lesestörung ☐ Rechtschreibstörung ☐ Lese- und Rechtschreibstörung
habe ich ☐ genutzt ☐ zum Teil genutzt ☐ nicht genutzt. *Unterschrift:*

Achte auf eine sorgfältige Darstellung. Deine Lösungsschritte müssen nachvollziehbar sein.

Teil A (hilfsmittelfrei)

1. Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$ und g mit $g(x)=\frac{1}{2}x^2$. Es gilt $D_f=D_g=R$.



a) Bestimmen Sie rechnerisch die Stellen, bei denen der Graph von f waagrechte Tangenten aufweist. /3

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g mit in das gegebene Koordinatensystem ein. /2

c) Ermitteln Sie den Flächeninhalt, den die beiden Graphen einschließen. /8

d) Erläutern Sie die geometrische Bedeutung des Integrals $\int_{x_1}^{x_3} f(x)-g(x)\,dx$ im Vergleich zu c) und berechnen Sie dessen Wert. Dabei gilt, dass x_1 bzw. x_3 die jeweils äußerste Schnittstelle der beiden Graphen bezeichnet. /4

2. Eine 2€-Münze wird dreimal geworfen. Die Zufallsgröße X beschreibt dabei die Anzahl, wie oft „Zahl" geworfen wird.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und geben Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeits-verteilung von X in unten stehender Tabelle an. /3

x	3	2	1	0
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ. /4

Viel Erfolg
Leberecht, Stadler

Lösung Teil A

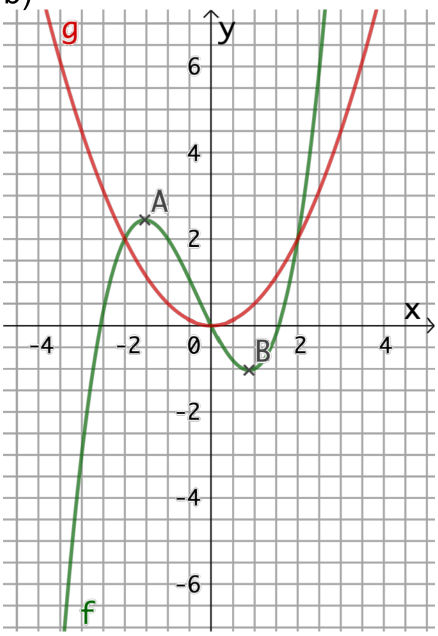
1.

a) $f'(x)=\frac{3}{2}x^2+x-2$

$\frac{3}{2}x^2+x-2=0$

$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot\frac{3}{2}\cdot(-2)}}{3}=\frac{-1\pm\sqrt{1+12}}{3}\Rightarrow x_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$ und $x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$

b)



c)

Abszissen der Schnittpunkte von G_f und G_g:

$\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x=\frac{1}{2}x^2\vee\frac{-1}{2}x^2$

$\frac{1}{2}x^3-2x=0$

$\frac{1}{2}x(x^2-4)=0$

$\frac{1}{2}x(x-2)(x+2)=0\Rightarrow x_1=0;x_2=2;x_3=-2$

Flächeninhalt:

$A=A_1+A_2$ mit

$$A_1=\left|\int_{-2}^{0}f(x)-g(x)\,dx\right|=\left|\int_{-2}^{0}\frac{1}{2}x^3-2x\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{8}-x^2\right]_{-2}^{0}\right|=|0-(2-4)|=2$$

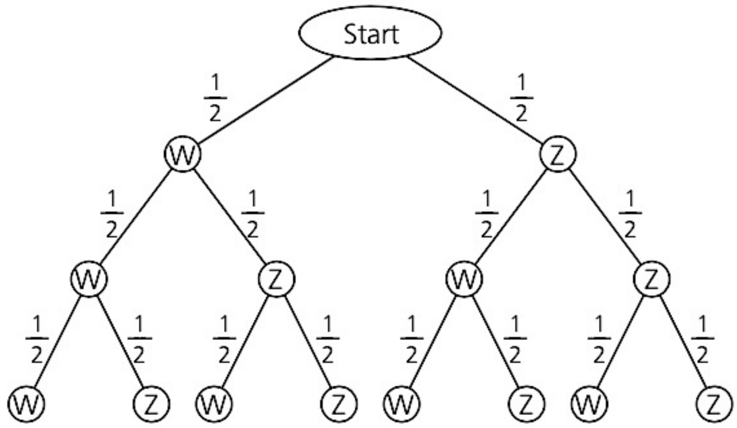
$$A_2=\left|\int_{0}^{2}f(x)-g(x)\,dx\right|=\left|\int_{0}^{2}\frac{1}{2}x^3-2x\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{8}-x^2\right]_{0}^{2}\right|=|(2-4)-0|=2$$

$\Rightarrow A=4$

d)
Durch dieses Integral berechnet man die Flächenbilanz der Flächenstücke, die von den Graphen im gegebenen Intervall eingeschlossen werden.

$$\int_{-2}^{2} f(x)-g(x)\,dx=\int_{-2}^{2} \frac{1}{2}x^3-2x\,dx=\left[\frac{x^4}{8}-x^2\right]_{-2}^{2}=(2-4)-(2-4)=0$$

2.
a)



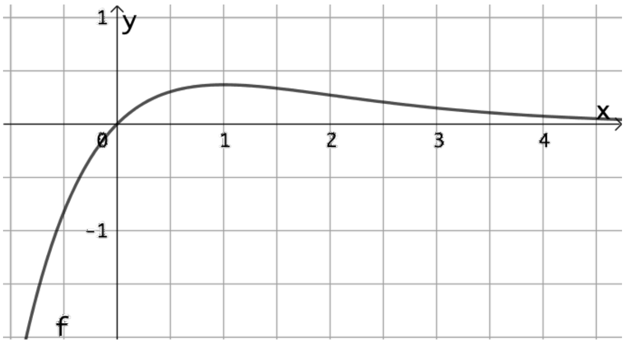
b)

$$\mu=E(X)=3\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+0\cdot\frac{1}{8}=1{,}5$$

$$Var(X)=(3-1{,}5)^2\cdot\frac{1}{8}+(2-1{,}5)^2\cdot\frac{3}{8}+(1-1{,}5)^2\cdot\frac{3}{8}+(0-1{,}5)^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow\sigma=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Teil B

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x \cdot e^{-x}$; $D_f = R$. (siehe Zeichnung)



a) Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto F(x) = -e^{-x}(x+1)$; $D_f = R$ eine Stammfunktion von f ist. /2

b) Berechnen Sie $\int_0^e f(x)\,dx$ und veranschaulichen Sie das Integral in obiger Figur farbig. /3

2. Bei einer Faschingsveranstaltung werden Lose verkauft. Jedes sechste Los ist ein Gewinn! Bestimmen Sie, wie viele Lose man mindestens kaufen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens einen Gewinn zu erhalten. /5

3. Max behauptet, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75% nur am Geschmack erkennen kann, ob in eine Tasse der Kaffee auf die Milch oder umgekehrt die Milch auf den Kaffee gegossen wurde. Bei 50 Versuchen liegt er 26-mal richtig.

a) Geben Sie die Null- und die Gegenhypothese sowie den Annahme- und Ablehnungsbereich an und bestimmen Sie, ob seine Behauptung auf einem Signifikanzniveau von 5% widerlegt ist. /5

b) Beschreiben Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang. Bestimmen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn Max die Reihenfolge des Einschenkens in Wirklichkeit in nur 60% der Versuche erkennt. /3

4.

a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cdot \cos(x)\,dx$. /2

b Erklären Sie, warum der Graph in Abbildung 1 kein Graph einer Integralfunktion sein kann. /1

c) Begründen Sie, warum der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße nicht negativ werden kann. /3

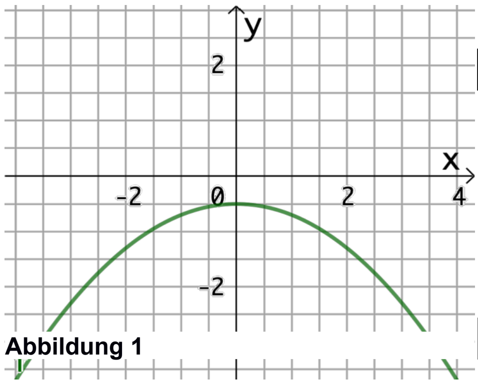


Abbildung 1

d) Begründen Sie, ob folgende Aussage wahr oder falsch ist: $\int_{-1}^{1} \frac{x^3 - 1}{x^2}\,dx = 2$. /2

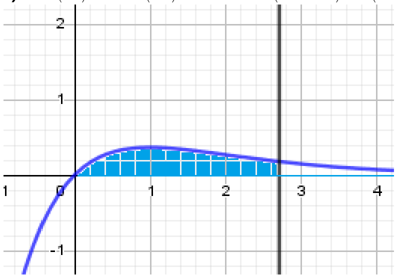
Viel Erfolg
Leberecht, Stadler

Lösung Teil B

1.

a) $Produktregel: F'(x) = e^{-x} \cdot (x+1) + (-e^{-x}) \cdot 1 = x \cdot e^{-x} = f(x)$

b) $F(e) - F(0) = -e^{-e}(e+1) - (-1) \approx 0{,}7546$



2.

$p = \frac{1}{6}; X = Anzahl\, der\, Gewinnlose$

$P(X \geq 1) \geq 0{,}9 \rightarrow P(X=0) \leq 0{,}1 \rightarrow (1-p)^n \leq 0{,}1 \rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1 \rightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 12{,}6.$

Er muss mindestens 13 Lose kaufen.

3.

a)

$H_0: p \geq 0{,}75$ $\quad H_1: p < 0{,}75$

$A = \{k+1; \ldots; 50\};$ $\quad \acute{A} = \{0; 1; \ldots; k\}$

$\alpha = P(\acute{A}) \leq 0{,}05$

$P_{0,75}^{50}(X \leq k) \leq 0{,}05 \Rightarrow k = 31 \Rightarrow A = \{32; \ldots; 50\}\, und\, \acute{A} = \{0; 1; \ldots; 31\}.$

Da er nur 26-mal richtig rät, ist seine Behauptung auf dem Signifikanzniveau von 5% widerlegt.

b)

H_0: Max erkennt die Reihenfolge zu mindestens 75%.

Fehler 2. Art: Es wird fälschlicherweise angenommen, dass Max die Reihenfolge zu mind. 75% erkennt.

$\beta = P_{0,6}^{50}(X > k) = 1 - P_{0,6}^{50}(X \leq 28) = 1 - 0{,}32986 \approx 67\,\%$

4.

a) Für die Integrandenfunktion f mit dem Term $f(t) = t^3 \cdot \cos(t)$ gilt $f(-t) = -f(t)$. Daher ist sie punktsymmetrisch und es gilt $\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cdot \cos(x)\, dx = 0$ da über ein um den Ursprung symmetrisches Intervall integriert wird.

b) Er besitzt keine Nullstelle, deshalb kann es kein Graph einer Integralfunktion sein.

c) Es gilt $\mu = np$ mit $n \in N$ und $0 < p < 1$. Damit ist sowohl n als auch p positive und damit auch deren Produkt.

d) Falsch, da die Integrandenfunktion an der Stelle $x=0$ eine Definitionslücke hat, also in $[-1; 1]$ nicht stetig ist.