SA1 – Training

Aufgabe 1 Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit $f(x)=-0{,}5x^3+2x$ und $g(x)=-0{,}5(x+1)^2+0{,}5$, $D_f = D_g = \mathbb{R}$.
Skizzieren Sie den qualitativen Funktionsverlauf der Graphen G_f und G_g der anhand der Nullstellen und Extremstellen.

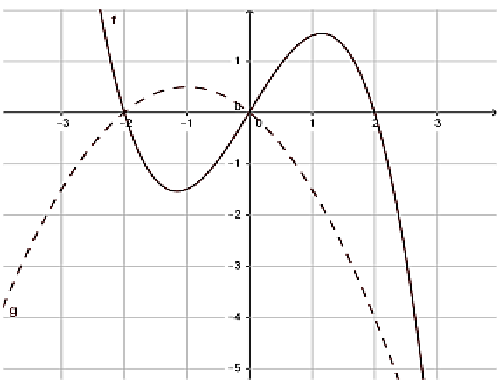
NST: $f(x)=x\cdot(-0{,}5x^2+2)\, also \quad x_1=0,\ \ x_2=-2,\ \ x_3=2$

$$g(x)=-0{,}5x^2-x=x\cdot(-0{,}5-1)\Rightarrow x_1=0, x_2=-2$$

Extrema:: $f'(x)=-1{,}5x^2+2; f''(x)=-3x \quad f'(x)=0\Rightarrow x_4=\frac{2}{\sqrt{(3)}}; x_5=-\frac{2}{\sqrt{(3)}}$ wegen

$f''(x_3)<0: Max\, bei\, x_3;\ \ f''(x_4)>0: Min\, bei\, x_3$ Punktsym. zum Urspr wegen f(-x) = -f(x)

$$g'(x)=-x-1; g''(x)=-1; g'(x)=0\, wenn\, x=-1; f''<0\Rightarrow Max\, bei\, x=-1$$



a) Berechnen Sie die beiden Flächenstücke, die die Graphen G_f und G_g miteinander einschließen. Dokumentieren Sie dabei Ihr Vorgehen.
Schnittstellen der Graphen ermitteln → mit den Schnittstellen als Grenzen (f(x)-(g(x)) integrieren

$$f(x)-g(x)=-0.5x^3+2x+0.5x^2-x-0.5+0.5 \ = \ -0.5x^3+0.5x^2+3x=x\cdot(-0{,}5x^2+0{,}5x+3)$$

NST f(x) – g(x) : $x_1=-2, x_2=0, x_3=3$

Fläche : $A_1=\int_{-2}^{0}(-0{,}5x^3+0{,}5x^2+3x)\,dx \quad A_2=\int_{0}^{3}(-0{,}5x^3+0{,}5x^2+3x)\,dx$

$$A_1=[\![\frac{-0{,}5}{4}x^4+\frac{0{,}5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2]\!]_{0}^{-2}=\mathbf{-2{,}667} \quad A_2=[\![\frac{-0{,}5}{4}x^4+\frac{0{,}5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2]\!]_{0}^{3}=\mathbf{7{,}875}$$

¿

Die Fläche zwischen den Graphen beträgt $|-2{,}667|+|7{,}875|FE \ = \ \mathbf{10{,}542}\, FE$

b) Geben Sie mit anschaulicher Begründung *(ohne Rechnung)* an, welchen Wert folgendes Integral hat $\int_{-2{,}5}^{2{,}5} f(x)\,dx$.

Da f punktsym. ist (ausschließlich ungeradzahlige Exponenten) muss das Integral den Wert 0 haben. $\int_{-2{,}5}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{2{,}5} f(x)\,dx$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Wendestellen der Integralfunktion F mit

$$F(x)=\int_{-1}^{x}(t+1)(t-2)\,dt\,.$$

.

$$(t+1)(t-2)=t^2-2t+t-2 \;=\; t^2-t-2 \quad \text{oder gleich} \quad F'(x)=x^2-x-2$$

$$F(x)=[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-2t]\,{}^{x}_{-1}=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x-(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2) \;=\; \mathbf{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{7}{6}}$$

$$F'(x)=x^2-x-2 \qquad F''(x)=2x-1 \qquad F'''(x)=2\neq 0$$

Wendestellen: $Notwendig\, F''(x)=0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\, Hinreichend: F'''(x_1)\neq 0$

Aufgabe 3
Der JlM-Studie zufolge besitzen deutlich weniger als 90% der Jugendlichen einen Computer. Daher wird an den Stadtrat einer Kleinstadt der Wunsch herangetragen, im örtlichen Jugendzentrum einen Arbeitsraum mit Computern einzurichten. Der Stadtrat möchte die dafür erforderlichen finanziellen Mittel nur dann bewilligen, wenn weniger als 90 % der Jugendlichen der Kleinstadt einen Computer besitzen.

a) Die Entscheidung über die Bewilligung der finanziellen Mittel soll mithilfe einer Befragung von 100 zufällig ausgewählten 12- bis 19-jährigen Jugendlichen der Kleinstadt getroffen werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die finanziellen Mittel irrtümlich bewilligt werden, soll höchstens 5% betragen. Bestimmen Sie die zugehörigeEntscheidungsregel, bei der zugleich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die finanziellen Mittel irrtümlich nicht bewilligt werden, möglichst klein ist.
Binomial mit n=100, p=0,9
Annahme : {1,...,k }, Ablehnung : { k+1,...,100}
$P_{0,9}^{100}(X\leq k)\leq 0,05$
Aus Tabellenwerk : k = 84
Die Mittel gibt es, wenn höchstens 84 keinen Compuer haben.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 befragten Jugendlichen genau 85 einen Computer besitzen, wenn der Anteil derjenigen Jugendlichen, die einen Computer besitzen, unter den Jugendlichen der Kleinstadt ebenso groß ist wie unter den in der Tabelle erfassten Jugendlichen.
Anteil Jugendl. mit Comp. in Tabelle : $\frac{164}{200}=0,82 \qquad P_{0,82}^{100}(X=85)\approx 8,1\,\%$